

Министерство образования Российской Федерации  
Московская государственная академия  
тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова

Кафедра Высшей  
и прикладной математики

Шевелев В.В., Валишин А.А., Локшин Д.Л., Тишаева И.Р.

# Преобразование Лапласа и его приложения к решению задач, моделирующих процессы тепло-массопереноса

Методическое пособие

Москва 2002г.

# Оглавление

Введение . . . . .	3
1. Определение преобразования Лапласа . . . . .	5
2. Свойства преобразования Лапласа . . . . .	9
3. Формула обращения . . . . .	17
4. Теорема разложения . . . . .	23
Полином имеет простые корни . . . . .	23
Полином имеет кратные корни . . . . .	26
5. Теорема о предельных значениях . . . . .	27
6. Операционный метод решения краевых задач нестационарной теплопроводности . . . . .	28
7. Изображение разрывных оригиналов . . . . .	35
8. Изображение периодических оригиналов . . . . .	43
9. Нахождение изображений функций непосредственно с помощью определения и с использованием таблиц изображений . . . . .	46
10. Изображения производных и интеграла от оригинала. . . . .	51
11. Отыскание оригинала по изображению. . . . .	54
12. Применение операционного исчисления к решению некоторых дифференциальных и интегральных уравнений и систем дифференциальных уравнений. . . . .	59
Список литературы . . . . .	66
Справочные таблицы . . . . .	68
Основные правила операционного исчисления . . . . .	68
Изображения по Лапласу некоторых функций . . . . .	69

## Введение

При решении краевых задач для уравнений теплопроводности и диффузии классическими методами для некоторых задач (задачи с переменными граничными условиями, с системой неоднородных тел и т.д. [1, 2]) встречаются большие трудности.

Это связано с тем, что решения часто получаются в виде интегралов или рядов, которые мало пригодны для практического использования.

Поэтому в теории тепло- и массопереноса в ряде случаев (о которых говорилось выше) с успехом применяется операционный метод, который позволяет получить не только точное решение краевой задачи, но и его асимптотические выражения для малых и больших значений времени после начала процесса переноса тепла или массы.

В то же время операционный метод имеет недостатки как и любой другой метод. Применительно к краевым задачам теплопроводности и диффузии в связи с этим необходимо отметить, что операционный метод применим только для линейных уравнений теплопроводности и диффузии с линейными граничными условиями и с постоянными коэффициентами, соответственно, тепло- и массопереноса.

Символическое, или операционное, исчисление как самостоятельный математический метод было впервые разработано профессором Киевского университета М. Ващенко-Захарченко. В своей монографии "Символическое исчисление и его приложение к интегрированию линейных дифференциальных уравнений", вышедшей в 1862 году, автор дает систематическое изложение операционного исчисления и выводит основные соотношения и их применения к решению дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами.

В конце прошлого столетия Хевисайд применил чисто формально метод операционного исчисления к решению некоторых задач электротехники, не заботясь о строгом математическом обосновании метода.

Строгое обоснование операционного исчисления было дано значительно позже Эфросом и Данилевским в монографии "Операционное исчисление и контурные интегралы", опубликованной в 1937 году. Эфрос и Данилевский установили ряд новых соотношений и правил операционного исчисления, а предложенная Эфросом теорема является эффективным способом для нахождения начальных функций по изображениям.

Дальнейшее развитие операционное исчисление получило в работах В.А. Диткина и А.П. Прудникова [3], в которых дано обоснование операционного исчисления на основе современных математических представлений.

Таким образом, в настоящее время операционное исчисление представляет собой хорошо разработанный и обоснованный раздел математики, позволяющий эффективно решать разнообразные прикладные задачи, моделирующие физические и химические процессы, составляющие основу современных технологий, что имеет большую ценность для инженера, физика и химика-технолога.

Данная методическая разработка посвящена изложению основ операционного исчисления на базе преобразования Лапласа и его приложениям к решению задач теплопроводности и диффузии и является дальнейшим развитием курса "Математическое моделирование физико-химических процессов", читаемого студентам второго курса Московской государственной академии тонкой химической технологии им М.В. Ломоносова [4, 5, 6].

# 1. Определение преобразования Лапласа

Преобразование Лапласа ставит в соответствие функции действительной переменной  $f(t)$  функцию  $\bar{f}(p)$  комплексной переменной  $p = \sigma + iw$  с помощью соотношения

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Как видно из (1), преобразование Лапласа представляет собой интегральное преобразование, что позволяет при решении краевых задач для уравнений теплопроводности и диффузии, а также при решении обыкновенных дифференциальных уравнений реализовать основную идею метода интегральных преобразований: получить в результате применения метода более простую задачу, решение которой может быть сравнительно легко получено, а затем, с помощью обратного преобразования, найти искомое решение. Во многих случаях такой подход позволяет существенно облегчить технику вычислений, что будет проиллюстрировано далее на примере решения конкретных задач физического содержания.

Возвращаясь к (1) отметим, что в операционном исчислении  $f(t)$  называется оригиналом, а  $\bar{f}(p)$  — изображением.

Переход от оригинала к изображению с помощью преобразования (1) обозначают символом  $f(t) \dot{\rightarrow} \bar{f}(p)$  (читается: функция  $f(t)$  переходит в  $\bar{f}(p)$ ) или  $\bar{f}(p) \dot{\leftarrow} f(t)$  (функция  $\bar{f}(p)$  является изображением для  $f(t)$ ). Наряду с указанными применяются также обозначения:  $L^{-1}[\bar{f}(p)] = f(t)$ , где  $L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$  или  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$  (функция  $f(t)$  имеет своим изображением  $\bar{f}(p)$ ).

Естественно, что не для всякой функции несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом в правой части (1) имеет смысл. Преобразование Лапласа применяется для функций  $f(t)$ , определенных для всех значений действительной переменной

$$-\infty < t < +\infty$$

и удовлетворяющих следующим условиям:

1. при  $t < 0$   $f(t) \equiv 0$ ;
2. при  $t \geq 0$  функция  $f(t)$  на любом конечном промежутке оси имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;
3. при  $t \rightarrow +\infty$  функция имеет ограниченную степень роста, то есть для каждой функции рассматриваемого класса существуют такие положительные постоянные  $M$  и  $a$ , что для всех  $t > 0$

$$|f(t)| \leq Me^{at}. \quad (2)$$

Точная нижняя грань тех значений  $a$ , для которых имеет место неравенство (2), называется показателем роста функции  $f(t)$ .

Введем теперь **основное определение**.

Преобразованием Лапласа функции  $f(t)$  действительной переменной  $t$  называется преобразование, ставящее в соответствие функции  $f(t)$  функцию  $\bar{f}(p)$  комплексной переменной  $p$ , определенную с помощью интеграла (1).

Так как несобственный интеграл в (1) зависит от переменной  $p$  как от параметра, то он, вообще говоря, сходится не при всех значениях параметра  $p$ . Ответ на вопрос о сходимости несобственного интеграла (1) дает следующая теорема:

Интеграл (1) сходится в области  $\operatorname{Re} p > a$ , где  $a$  — показатель степени роста функции  $f(t)$ , причем в области  $\operatorname{Re} p \geq \sigma_0 > a$  этот интеграл сходится равномерно.

(Напомним, что действительная часть любой функции комплексной переменной  $\varphi(p)$  обозначается  $\operatorname{Re} \varphi(p)$ , а мнимая —  $\operatorname{Im} \varphi(p)$ . Таким образом,  $\varphi(p) = \operatorname{Re} \varphi(p) + i \operatorname{Im} \varphi(p)$ , где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица).

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся признаком сравнения сходимости несобственных интегралов. Имеем, оценивая в соответствии с признаком модуль несобственного интеграла и учитывая при этом (2):

$$|\bar{f}(p)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{at} |e^{iwt}| dt. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma = \operatorname{Re} p$ ,  $w = \operatorname{Im} p$ . Далее, с учетом формулы Эйлера имеем, что  $e^{iwt} = \cos wt + i \sin wt$ , и так как модуль любого комплексного числа  $z = x + iy$  определяется выражением  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , имеем  $|e^{iwt}| = \sqrt{\cos^2 wt + \sin^2 wt} = 1$ . Возвращаясь опять к (3), получим:

$$\begin{aligned} |\bar{f}(p)| &\leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-a)t} dt = -\frac{M}{\sigma-a} e^{-(\sigma-a)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{M}{\sigma-a} \left\{ 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\sigma-a)t} \right\} = \begin{cases} \frac{M}{\sigma-a}, & \sigma > a; \\ \infty, & \sigma \leq a, \end{cases} \end{aligned}$$

что и дает основание сделать вывод о том, что несобственный интеграл (1) сходится при  $\sigma > a$ , то есть при  $\operatorname{Re} p > a$ . Если

$\sigma \geq \sigma_0 > a$ , то аналогичная оценка дает

$$\left| \bar{f}(p) \right| \leq M \int_0^{\infty} e^{-(\sigma_0 - a)t} dt = \frac{M}{\sigma_0 - a}, \quad (4)$$

что и доказывает равномерную сходимость интеграла (1) по параметру  $p$  в области  $\operatorname{Re} p > a$  в силу признака Вейерштрасса.

Отметим, что в практических приложениях часто используется преобразование Лапласа-Карсона, которое определяется следующим образом:

$$\bar{f}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (5)$$

и отличается от преобразования Лапласа (1) дополнительным множителем  $p$ . Очевидно, что свойства преобразования Лапласа-Карсона легко могут быть получены из свойств преобразования Лапласа, к рассмотрению которых мы переходим.

## 2. Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность изображения (теорема сложения).

Если  $\bar{f}_i(p) \doteq f_i(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , то

$$\bar{f}(p) = \sum_{i=1}^n c_i \bar{f}_i(p) \doteq \sum_{i=1}^n c_i f_i(t), \quad \operatorname{Re} p > \max_{1 \leq i \leq n} a_i, \quad (6)$$

где  $C_i$  — заданные постоянные числа (действительные или комплексные),  $a_i$  — показатель степени роста функции  $f_i(t)$ .

Доказательство. Действительно, так как существуют изображения функций  $f_i(t)$ , то на основании известных свойств сходящихся несобственных интегралов с бесконечными пределами имеем:

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right) dt = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^{\infty} e^{-pt} f_i(t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \bar{f}_i(p), \end{aligned}$$

что и доказывает сформулированное свойство.

2. Теорема подобия. Если  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , тогда

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \bar{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (7)$$

Доказательство. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\lambda t) dt &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\lambda}(\lambda t)} f(\lambda t) d(\lambda t) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\lambda}\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda} \bar{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

3. Теорема запаздывания. Пусть  $\bar{f}(p) \doteq f(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$  и задана функция

$$f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \quad \tau > 0; \\ f(t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

Тогда

$$f_{\tau}(t) \doteq \bar{f}_{\tau}(p) = e^{-p\tau} \bar{f}(p). \quad (8)$$

Доказательство. Имеем

$$\bar{f}_{\tau}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f_{\tau}(t) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменной, положив  $t - \tau = \xi$ . Тогда

$$\bar{f}_{\tau}(p) = \int_0^{\infty} e^{-p(\xi+\tau)} f(\xi) d\xi = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-p\xi} f(\xi) d\xi = e^{-p\tau} \bar{f}(p),$$

что и требовалось доказать.

4. Изображение производной. Если функция  $f'(t)$  удовлетворяет условиям существования изображения и  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , то

$$f'(t) \doteq p\bar{f}(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (9)$$

Доказательство. Действительно, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} f'(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= p\bar{f}(p) - f(0), \end{aligned}$$

что и доказывает данное свойство.

5. Если функция  $f^{(n)}(t)$  удовлетворяет условиям существования изображения и  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , то

$$f^{(n)} \doteq p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (10)$$

Формула (10) доказывается так же, как и (9), путем  $n$ -кратного по частям в интеграле

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n)}(t) dt.$$

Доказательство (10) мы предоставляем читателю.

6. Изображение интеграла. Пусть  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ . Тогда

$$\Phi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} \bar{f}(p), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (11)$$

Доказательство. Легко видеть, что функция  $\Phi(t)$ , удовлетворяет условиям (1) и (2) существования изображения. Покажем, что  $\Phi(t)$  имеет тот же показатель степени роста, что и  $f(t)$ . Имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| \leq M \int_0^t e^{a\tau} d\tau = \\ &= \frac{M}{a} (e^{at} - 1) \leq \frac{M}{a} e^{at} \Rightarrow |\varphi(t)| \leq \frac{M}{a} e^{at}, \end{aligned}$$

то есть показатель степени роста  $\varphi(t)$  равен показателю степени роста  $f(t)$ . Вычисляя теперь изображение функции  $\varphi(t)$  по формуле (1), получим

$$\varphi(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt.$$

Изменяя в интеграле порядок интегрирования имеем далее

$$\varphi(t) \doteq \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} \bar{f}(p),$$

что и доказывает справедливость (11).

7. Изображение свертки (теорема Бореля). Сверткой функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  (иногда обозначается  $f_1(t) * f_2(t)$ ) называется функция  $\varphi(t)$ , определенная соотношением

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (12)$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, сделав в первом интеграле замену переменной интегрирования  $t - \tau = \xi$ .

Для функции  $\varphi(t)$ , определенной (12), справедливо следующее свойство:

Если  $f_1(t) \doteq \bar{f}_1(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_1$ ;  $f_2(t) \doteq \bar{f}_2(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a_2$ ; то

$$\varphi(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq \bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \max\{a_1, a_2\}. \quad (13)$$

Доказательство. Покажем, что свертка функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  с ограниченной степенью роста также является функцией с ограниченной степенью роста. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right| &\leq \int_0^t |f_1(\tau) f_2(t - \tau)| d\tau = \\ &= \int_0^t |f_1(\tau)| |f_2(t - \tau)| d\tau \leq M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1 \tau} e^{a_2(t - \tau)} d\tau = \\ &= \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2} (e^{a_1 t} - e^{a_2 t}) \leq \frac{2M_1 M_2}{|a_1 - a_2|} e^{at}, \end{aligned}$$

где  $a = \max\{a_1, a_2\}$ .

Легко видеть, что  $\varphi(t)$  удовлетворяет и остальным условиям существования изображения. Для вычисления изображения свертки воспользуемся формулой (1) и изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \varphi(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \\ = \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f_2(t - \tau) dt. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных  $t - \tau = \xi$  во внутреннем интервале, окончательно получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \doteq \int_0^\infty f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty f_2(\xi) d\xi = \\ &= \bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p). \end{aligned}$$

8. Дифференцирование изображения. Пусть  $\bar{f}(p) \doteq f(t)$  и выполняется условие  $\operatorname{Re} p > a$ . Тогда

$$\bar{f}'(p) \doteq -t f(t), \quad \operatorname{Re} p > a. \quad (14)$$

Не останавливаясь на строгом обосновании (14), которое можно найти в [7], продифференцируем формально (1) по параметру  $p$ . В результате получим

$$\bar{f}'(p) = - \int_0^\infty e^{-pt} t f(t) dt \doteq -t f(t).$$

Так как умножение функции  $f(t)$  на любую степенную функцию  $t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  не меняет ее степени роста, то справедливо также следующее свойство, вытекающее из свойства 8.

9. Если  $\bar{f}(p) \doteq f(t)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , то

$$\bar{f}^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t). \quad (15)$$

10. Интегрирование изображения. Если функция  $\frac{f(t)}{t}$  удовлетворяет условиям существования изображения, причем

$f(t) \doteq \bar{f}(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt = \int_p^{\infty} \bar{f}(q) dq. \quad (16)$$

Доказательство этого свойства можно найти в [7].

11. Теорема смещения. Если  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > a$ , то для любого комплексного числа  $\lambda$  справедливо равенство

$$\bar{f}(p + \lambda) \doteq e^{-\lambda t} f(t), \quad \operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda. \quad (17)$$

Доказательство. Действительно, функция  $\varphi(t) = e^{-\lambda t} f(t)$ , очевидно, удовлетворяет условиям существования изображения, которое по формуле (1) определено в области  $\operatorname{Re} p > a - \operatorname{Re} \lambda$  и

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} f(t) &\doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\lambda t} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)t} f(t) dt = \bar{f}(p + \lambda), \quad \operatorname{Re}(p + \lambda) > a, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему смещения.

В конце данной разработки приведены таблица свойств изображений (табл. 1) и таблица изображений ряда элементарных функций (табл. 2), а также функций, наиболее часто встречающихся при решении краевых задач для уравнений теплопроводности и диффузии.

Решение исходной краевой задачи в пространстве изображений позволяет получить изображение ее решения. Для того,

чтобы найти окончательно решение краевой задачи, необходимо уметь находить оригинал по данному изображению. В настоящее время имеются обширные таблицы изображений и оригиналов преобразования Лапласа и не менее часто используемого преобразования Лапласа-Карсона (5), например [8], что позволяет сравнительно легко получить решение поставленной задачи. В том случае, когда для полученного изображения в таблице нет соответствующего ему оригинала, необходимо воспользоваться формулой обращения преобразования Лапласа. Перейдем к рассмотрению этой формулы.

### 3. Формула обращения

Прежде чем перейти к формуле обращения, рассмотрим функцию  $f(x)$ , определенную на всей числовой оси  $x$ , предполагая, что она может быть разложена в ряд Фурье на любом интервале  $(-l, l)$  и что несобственный интеграл от абсолютной величины этой функции  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  сходится.

Рассмотрим сначала эту функцию на интервале  $(-l, l)$ . На основании сделанного предположения ее можно разложить на этом интервале в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x, \quad (18)$$

где  $w_n = \frac{\pi n}{l}$ , и

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos w_n x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin w_n x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Воспользуемся формулами Эйлера:

$$\cos w_n x = \frac{e^{iw_n x} + e^{-iw_n x}}{2}, \quad (21)$$

$$\sin w_n x = \frac{e^{iw_n x} - e^{-iw_n x}}{2i}. \quad (22)$$

Тогда (18) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{iw_n x} + e^{-iw_n x}) - ib_n (e^{iw_n x} - e^{-iw_n x}) = \\
 &= \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{iw_n x} + \bar{c}_n e^{-iw_n x}),
 \end{aligned}$$

где

$$c_n = a_n - ib_n, \quad \bar{c}_n = a_n + ib_n. \quad (23)$$

Учитывая (19) и (20), коэффициенты ряда Фурье можно представить в следующем виде, принимая во внимание,  $\cos w_n x + i \sin w_n x = \exp(iw_n x)$ :

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) e^{-iw_n t} dt, \quad \bar{c}_n = c_{-n}. \quad (24)$$

С учетом полученных результатов можно записать

$$f(x) = \frac{1}{2} c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{iw_n x} + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{iw_n x},$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iw_n x}. \quad (25)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать  $l$ . Обозначим

$$\frac{\pi}{l} = \Delta w_n = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{l}(n+1) - \frac{\pi}{l}n.$$

Тогда, так как по предположению  $f(x)$  разлагается в ряд Фурье на любом интервале, то имеем формально:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) e^{iw_n(x-t)} dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) e^{iw_n(x-t)} dt \Delta w_n. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Обозначим  $\varphi(w_n, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iw_n(x-t)} dt$ . Этот интеграл в соответствии со сделанными выше предположениями абсолютно сходится. Когда  $l \rightarrow \infty$ , можно считать, что интеграл

$$\int_{-l}^l f(t) e^{iw_n(x-t)} dt \approx \varphi(w_n, x). \quad (27)$$

Тогда (26) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(w_n, x) \Delta w_n = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta w_n \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(w_n, x) \Delta w_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w, x) dw.
 \end{aligned}$$

С учетом этого имеем:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(x-t)} f(t) dt \right) dw. \quad (28)$$

Формула (28) представляет собой интегральную формулу Фурье и является разложением функции  $f(x)$  в интеграл Фурье. Если положить

$$\bar{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t) dt, \quad (29)$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \bar{f}(w) dw. \quad (30)$$

Функция  $\bar{f}(w)$  называется Фурье-образом, преобразованием или трансформацией Фурье функции  $f(x)$ . Это преобразование широко используется при решении различных задач физики, химии и т.д.

Мы пришли к интегралу Фурье и преобразованию Фурье на основании не очень строгих рассуждений. Строгое обоснование условий разложимости функции в интеграл Фурье, приводящее к тем же результатам, можно найти в [9].

Формула (28) позволяет найти формулу обращения преобразования Лапласа. Эта задача решается с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть известно, что заданная функция  $\bar{f}(p)$  в области  $\text{Re } p > a$  является изображением кусочно-гладкой функции  $f(t)$  действительной переменной  $t$  и обладает степенью роста  $a$ . Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) dp, \quad \sigma > a. \quad (31)$$

Доказательство. Напомним, что функция  $f(t)$  называется кусочно-гладкой на интервале  $(a, b)$ , если  $(a, b)$  можно разбить на конечное число частичных интервалов, в каждом из которых функция  $f(t)$  непрерывна вместе со своей производной.

По условию теоремы функция  $f(t)$  существует и нам известна ее степень роста. Так как  $f(t)$  может не разлагаться в интеграл Фурье, то рассмотрим вспомогательную функцию  $\varphi(t) = e^{-\sigma t} f(t)$ ,  $\sigma > a$ . Эта функция является кусочно-гладкой,

на любом ограниченном участке оси  $t$  имеет конечное число точек разрыва первого рода и экспоненциально стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Она может представлена с помощью интеграла Фурье:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{iw(t-\eta)} d\eta. \quad (32)$$

Представляя в (32) вместо  $\varphi(t)$  ее выражение через  $f(t)$ , получаем

$$\begin{aligned} e^{-\sigma t} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma\eta} f(\eta) e^{iw(t-\eta)} d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} dw \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+iw)\eta} f(\eta) d\eta, \quad (33) \end{aligned}$$

так как  $f(\eta) \equiv 0$  при  $\eta < 0$ .

Обозначим  $p = \sigma + iw$  и заметим, что внутренний интеграл в (33) представляет собой изображение искомой функции  $f(t)$ . Тогда выражение (33) принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+iw)t} \bar{f}(\sigma+iw) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) dp, \quad (34)$$

что и доказывает теорему.

Здесь проведена замена переменной интегрирования  $w$  на  $p = \sigma + iw$ . В соответствии с этой заменой  $dw = \frac{1}{i} dp$  и интегрирование вдоль  $w$  заменяется интегрированием по  $p$  по прямой  $\operatorname{Re} p = \sigma$ , параллельной мнимой оси  $w$  от  $-\infty$  до  $\infty$  и лежащей правее прямой  $\operatorname{Re} p = a$  (рис. 1). Значение интеграла (34), очевидно, не зависит от величины  $\sigma$  при условии, что прямая интегрирования лежит правее прямой  $\operatorname{Re} p = a$ .

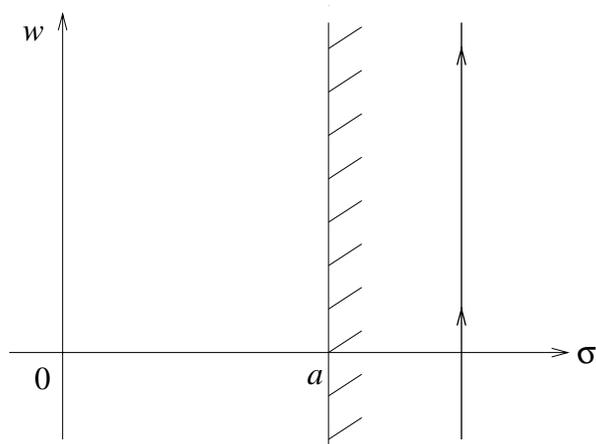


Рис. 1.

Формула (31) часто называется формулой Меллина и она представляет собой по существу формулу обращения преобразования Лапласа.

Применение этой формулы требует знания основ теории функций комплексной переменной так как интеграл в правой части формулы (31) есть интеграл от функции комплексной переменной  $\bar{f}(p)$  по линии, лежащей в комплексной плоскости.

В ряде случаев оригинал может быть получен с помощью теорем разложения, вытекающих из формулы обращения.

## 4. Теорема разложения

Прежде чем переходить к изложению теорем разложения, заметим, что их строгое обоснование требует привлечение аппарата теории функций комплексной переменной, что выходит за рамки данной методической разработки. Поэтому мы ограничимся изложением сути теорем разложения, отсылая интересующихся их обоснованием, к работе [10].

Пусть изображение  $\bar{f}(p)$  функции  $f(t)$  можно представить как отношение двух полиномов:

$$\bar{f}(p) = \frac{\bar{\Phi}(p)}{\bar{\Psi}(p)}, \quad (35)$$

где

$$\bar{\Phi}(p) = b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_m p^m, \quad (36)$$

$$\bar{\Psi}(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_n p^n, \quad (37)$$

Отметим, что  $n > m$ , так как в случае  $m \geq n$  оригинал функции, соответствующей выделяемой при этом целой части (т.е. полинома), представляет некоторую разрывную функцию особого рода (обобщенную функцию [3]). Полином  $\bar{\Psi}$  имеет  $n$  (возможно комплексных) корней  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . При этом возможны следующие два случая: полином  $\bar{\Psi}$  имеет только простые корни и полином  $\bar{\Psi}$  имеет кратные корни. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

### Полином имеет простые корни.

Пусть все корни различны, тогда

$$\bar{\Psi}(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n). \quad (38)$$

Тогда, как известно из курса математического анализа, рациональную дробь (35) можно представить в виде следующего разложения на сумму простых дробей:

$$\frac{\bar{\varphi}(p)}{\bar{\psi}(p)} = \frac{c_1}{p-p_1} + \frac{c_2}{p-p_2} + \dots + \frac{c_n}{p-p_n}, \quad (39)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — неизвестные пока коэффициенты, не зависящие от  $p$ . Для определения  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  умножим обе части равенства (39) на  $p - p_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , и перейдем к пределу при  $p \rightarrow p_k$ . Тогда все члены в правой части (39), за исключением  $k$ -го, будут равны нулю, а левая часть становится неопределенной, так как числитель и знаменатель равны нулю. Имеем таким образом

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\bar{\varphi}(p)}{\bar{\psi}(p)} (p - p_k) = c_k. \quad (40)$$

Раскрывая левую часть (40) по правилу Лопиталья, получим

$$c_k = \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{\bar{\varphi}(p) + (p - p_k)\bar{\varphi}'(p_k)}{\bar{\psi}'(p_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (39) и записывая результат в сокращенном виде с помощью знака суммирования, имеем

$$\frac{\bar{\varphi}(p)}{\bar{\psi}(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\varphi}(p_k)}{\bar{\psi}'(p_k)(p - p_k)}.$$

По таблице находим, что

$$\frac{1}{p - p_k} \doteq e^{p_k t},$$

а, учитывая свойство линейности преобразования Лапласа, получим теорему разложения Ващенко-Захарченко, нестрогая формулировка которой выглядит следующим образом: если изображение  $\bar{f}(p)$  функции  $f(t)$  представляет собой отношение полиномов (36), (37), а знаменатель дроби имеет простые корни, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\Phi}(p_k)}{\bar{\Psi}'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (42)$$

Обобщение теоремы. Теорема разложения справедлива и для случая, когда изображение  $\bar{f}(p)$  есть отношение трансцендентных функций  $\bar{\Phi}(p)$  и  $\bar{\Psi}(p)$ . В теории функций комплексной переменной доказывается, что такая функция разлагается в ряд по простейшим дробям вида (39). В результате получим то же соотношение (42).

Если отношение двух целых трансцендентных функций можно привести к отношению двух сходящихся степенных рядов с показателями степени в виде натуральных чисел (обобщенных полиномов), то есть

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(p) &= b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n + \dots \\ \bar{\Psi}(p) &= a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n + \dots \end{aligned}$$

( $\bar{\Psi}$  не имеет свободного члена), то рассмотренная выше теорема разложения может быть распространена и на этот случай. При этих условиях можно показать, что оригинал  $f(t)$  имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\Phi}(p_k)}{\bar{\Psi}'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (43)$$

## Полином имеет кратные корни.

В этом случае

$$\bar{\Psi}(p) = (p - p_1)^{n_1} (p - p_2)^{n_2} \dots (p - p_s)^{n_s}$$

и оригинал  $f(t)$  определяется выражением

$$f(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \left\{ \frac{\bar{\Phi}(p)}{\bar{\Psi}(p)} (p - p_k)^{n_k} e^{p_k t} \right\}. \quad (44)$$

Частный случай теоремы разложения (первая теорема разложения): Если  $\bar{f}(p)$  можно разложить в сходящийся степенной ряд:

$$\bar{f}(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n}, \quad (45)$$

то

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1}. \quad (46)$$

## 5. Теорема о предельных значениях

Эта теорема представляет большой интерес для практики, так как в ряде случаев при решении краевых задач теплопроводности и диффузии достаточно ограничиться знанием температурного поля или распределения концентрации растворенного вещества для начальных моментов времени от начала процесса тепло или массопереноса или, наоборот, для больших (по сравнению с характерным временем процесса) времен. Преобразование Лапласа в этом отношении обладает полезным свойством, состоящим в том, что по асимптотическому поведению изображения  $\bar{f}(p)$  можно найти соответствующее асимптотическое поведение оригинала.

Приведем эту теорему без доказательства. Подробнее см. [10].

Теорема. Если  $f(t)$  является оригиналом вместе со своей производной  $f'(t)$  и  $f(p) \doteq f(t)$ , то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \bar{f}(p) = f(0),$$

где  $p \rightarrow \infty$  внутри угла  $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$  ( $\delta > 0$ ) и  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ ; если, кроме того, существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty),$$

то  $\lim_{p \rightarrow 0} p \bar{f}(p) = f(\infty)$ , где  $p \rightarrow 0$  внутри того же угла.

## 6. Операционный метод решения краевых задач нестационарной теплопроводности

Операционный метод решения краевых задач теплопроводности проиллюстрируем на примере решения первой краевой задачи теплопроводности для бесконечной пластины  $0 \leq x \leq l$  с нулевой начальной температурой и температурой  $\varphi_1(t)$  при  $x = 0$  и  $\varphi_2(t)$  при  $x = l$ . Математическая формулировка этой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0 \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} T(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} T(0,t) = \varphi_1(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} T(l,t) = \varphi_2(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (50)$$

Здесь  $T(x,t)$  — температура в точке  $x$  в момент времени  $t$ .

**Решение.** Преобразуем уравнение (47) по формуле (1) преобразования Лапласа.

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} e^{-pt} dt = a \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} dt.$$

В левой части этого равенства воспользуемся свойством (4) (изображение производной), а в правой части поменяем местами операции интегрирования и дифференцирования. (Это возможно при равномерной сходимости интеграла.) В результате получим:

$$p\bar{T}(x,p) = a \frac{d^2 \bar{T}(x,p)}{dx^2}, \quad 0 < x < l, \quad (51)$$

где  $\bar{T}(x, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(x, t) dt$ .

Общее решение (51) удобно представить в виде:

$$\bar{T}(x, p) = A(p) \operatorname{sh} \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right) + B(p) \operatorname{sh} \left( (l-x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right). \quad (52)$$

Неизвестные коэффициенты  $A$  и  $B$  найдем, удовлетворяя граничным условиям (49) и (50), которые имеют вид в пространстве изображений:

$$\bar{T}(0, p) = \bar{\Phi}_1(p) \quad (53)$$

$$\bar{T}(l, p) = \bar{\Phi}_2(p). \quad (54)$$

Подставляя (53) и (54) выражение (52), найдем  $A(p)$ ,  $B(p)$ :

$$A(p) = \frac{\bar{\Phi}_2(p)}{\operatorname{sh} \left( l \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}, \quad B(p) = \frac{\bar{\Phi}_1(p)}{\operatorname{sh} \left( l \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}.$$

Подставляя полученные выражения в (52), получаем решение задачи (47)–(50) в изображении:

$$\bar{T}(x, p) = \bar{\Phi}_1(p) \frac{\operatorname{sh} \left( (l-x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\operatorname{sh} \left( l \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} + \bar{\Phi}_2(p) \frac{\operatorname{sh} \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\operatorname{sh} \left( l \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}. \quad (55)$$

Переходя к оригиналу, с учетом теоремы о свертке, находим

$$T(x, t) = \int_0^t \Phi_1(\tau) W_1(x, t - \tau) d\tau + \int_0^t \Phi_2(t) W_2(x, t - \tau) d\tau. \quad (56)$$

Здесь

$$W_1(x, t) \doteq \frac{\operatorname{sh}\left((l-x)\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\operatorname{sh}\left(l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)},$$

$$W_2(x, t) \doteq \frac{\operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\operatorname{sh}\left(l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}.$$

Оригиналы записанных функций найдем, воспользовавшись теоремой разложения. Так как  $\operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ , то отношения гиперболических синусов, через которые выражаются изображения функций  $W_1(x, t)$  и  $W_2(x, t)$ , удовлетворяют обобщению теоремы разложения (если домножить числитель и знаменатель на  $\sqrt{p}$ ), сформулированному выше. Применяя эту теорему в рассматриваемом случае, получим (формула (43)):

$$\frac{\operatorname{sh}\left((l-x)\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\operatorname{sh}\left(l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)} \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left((l-x)\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\left[\operatorname{sh}\left(l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]'_{p=p_k}} e^{p_k t}, \quad (57)$$

где  $p_k$  — корни уравнения

$$\operatorname{sh}\left(l\sqrt{\frac{p}{a}}\right) = 0. \quad (58)$$

Для определения корней этого уравнения воспользуемся тем, что  $\operatorname{sh} x = -i \sin ix$ . Тогда (58) примет вид

$$\sin\left(il\sqrt{\frac{p}{a}}\right) = 0,$$

откуда следует, что

$$il\sqrt{\frac{p_k}{a}} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow \quad (59)$$

$$p_k = -a \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (60)$$

Подставляя  $p_k$  в (57), учитывая при этом, что

$$\operatorname{ch} ix = \cos x, \quad i \operatorname{sh} ix = -\sin ix,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \left( (l-x) \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\operatorname{sh} \left( l \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} &\doteq \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \left( (l-x) \frac{\pi k}{li} \right)}{\operatorname{ch} \left( \frac{\pi k}{i} \right)} k e^{-\left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 at} = \\ &= \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i \sin \left( (l-x) \frac{k\pi}{l} \right)}{(-1)^k i} k e^{-\left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 at} = \\ &= \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k \sin \left( \frac{k\pi(l-x)}{l} \right) e^{-\left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 at} = \\ &= \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{k=0}^{\infty} k \sin \left( \frac{k\pi x}{l} \right) e^{-\left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 at}; \end{aligned}$$

здесь учтено, что

$$\sin \left( \frac{k\pi(l-x)}{l} \right) = \sin \left( k\pi - \frac{k\pi x}{l} \right) = (-1)^k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

Аналогичным образом находим, что

$$\frac{\operatorname{sh} \left( x \sqrt{\frac{p}{a}} \right)}{\operatorname{sh} \left( l \sqrt{\frac{p}{a}} \right)} \doteq -\frac{2\pi a}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \sin \left( \frac{k\pi x}{l} \right) e^{-\left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 at};$$

подставляя найденные оригиналы в (56), получим искомое решение:

$$T(x, t) = \frac{2\pi a}{l^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \times \\ \times \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a(t-\tau)} \left[ \varphi_1(\tau) + (-1)^{k+1} \varphi_2(\tau) \right] d\tau. \quad (61)$$

Полученное выражение для  $T(x, t)$  совпадает с известным решением этой же задачи методом интегральных преобразований по координате.

Операционный метод позволяет получить решение рассмотренной краевой задачи в другой форме, более пригодной для расчета профиля температуры при малых значениях критерия Фурье  $Fo = \frac{at}{l^2} \ll 1$ , в то время как формула (61) удобна для нахождения  $T(x, t)$  при  $Fo \geq 1$ . Для получения решения (47)–(50) в случае, когда  $Fo \ll 1$ , разложим изображение функции  $W_1(x, t)$  в ряд:

$$W_1(x, t) \doteq \frac{\text{sh}\left((l-x)\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\text{sh}\left(l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\ = \frac{\exp\left((l-x)\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \exp\left(-l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{\exp\left(l\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \exp\left(-l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\ = \frac{\exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \exp\left(-2l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{1 - \exp\left(-2l\sqrt{\frac{p}{a}}\right)} = \\ = \left( \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \exp\left(-2l\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-2nl\sqrt{\frac{p}{a}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(- (2nl+x)\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(- (2l(n+1)-x)\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

Здесь было использовано разложение

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Воспользуемся формулой (см. табл. 2)

$$e^{-\alpha\sqrt{p}} \doteq \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}};$$

тогда оригинал  $W_1(x, t)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} W_1(x, t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi a t^3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (2nl+x) \exp\left(-\frac{(2nl+x)^2}{4at}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (2nl-x) \exp\left(-\frac{(2nl-x)^2}{4at}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi a t^3}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (2nl+x) \exp\left(-\frac{(2nl+x)^2}{4at}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{-1} (2nl+x) \exp\left(-\frac{(2nl+x)^2}{4at}\right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$W_1(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi a t^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2nl+x) \exp\left(-\frac{(2nl+x)^2}{4at}\right). \quad (62)$$

Функция  $W_1(x, t)$  может быть выражена через тэта-функцию Якоби

$$\Theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-n)^2}{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+n)^2}{t}\right). \quad (63)$$

Нетрудно видеть, что

$$W_1(x, t) = -\frac{a}{l} \frac{\partial}{\partial x} \Theta \left( \frac{x}{2l}, \frac{at}{l^2} \right). \quad (64)$$

Аналогичным образом находим, что

$$W_2(x, t) = \frac{a}{l} \frac{\partial}{\partial x} \Theta \left( \frac{l-x}{2l}, \frac{at}{l^2} \right). \quad (65)$$

Таким образом, решение  $T(x, t)$  при  $Fo \ll 1$  можно записать с учетом (64), (65) в виде

$$T(x, t) = -\frac{a}{l} \int_0^t \varphi_1(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \Theta \left( \frac{x}{2l}, \frac{a}{l^2}(t-\tau) \right) d\tau + \frac{a}{l} \int_0^t \varphi_2(\tau) \frac{\partial}{\partial x} \Theta \left( \frac{l-x}{2l}, \frac{a}{l^2}(t-\tau) \right) d\tau. \quad (66)$$

Это решение удобно для малых значений  $Fo$ , так как ряд (62) быстро сходится при малых значениях  $t$ . На этом конкретном примере видно большое преимущество операционного метода, который позволяет получить решение одной и той же задачи в двух видах: одно удобной для расчетов при малых значениях  $Fo$ , другое — при больших значениях  $Fo$ .

## 7. Изображение разрывных оригиналов

Найдем изображение так называемой функции Хевисайда, которая обозначается  $\theta(t)$  и определяется равенством (см. также [рис. 2](#))

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (67)$$

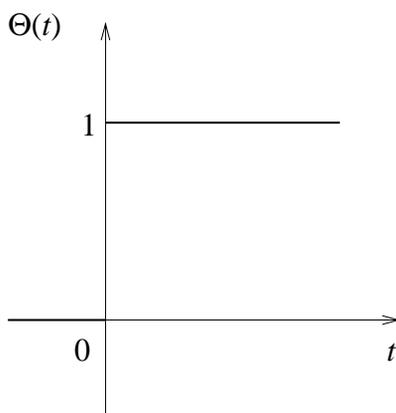


Рис. 2.

Пользуясь определением преобразования Лапласа, находим для  $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$

$$\theta(t) \doteq \int_0^{\infty} \theta(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \quad (68)$$

Итак,

$$\theta(t) \doteq \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (69)$$

Найдем, например, изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-at}, & x \geq 0 \end{cases} \equiv \theta(t)e^{-at}, \quad (70)$$

где  $a$  — комплексное число. Имеем

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a}, \quad (71)$$

если  $\operatorname{Re}(p-a) > 0$  или  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$  (т.е. правее прямой  $p = \operatorname{Re} a$  на комплексной плоскости). Итак,

$$\theta(t)e^{-at} \doteq \frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a. \quad (72)$$

Роль множителя  $\theta(t)$  в выражении (70) состоит в том, что он “гасит” (т.е. обращает в нуль) функцию при  $t < 0$ . Вообще, если функция  $f(t)$  не равна нулю при  $t < 0$  и, следовательно, не является оригиналом, то функция  $\theta(t)f(t)$ , “погашенная” при  $t < 0$ , уже будет оригиналом. Обычно принято считать, что все функции, которые рассматриваются как оригиналы, снабжены этим множителем  $\theta(t)$ , хотя сам этот множитель в написании часто опускается. Так, например, мы можем писать  $t^n$ ,  $e^{-at}$ ,  $\sin wt$  и т.д., подразумевая при этом соответственно  $\theta(t)t^n$ ,  $\theta(t)e^{-at}$ ,  $\theta(t)\sin wt$  и т.д.

Теорему запаздывания оригинала можно переписать теперь так: Если  $f(t) \doteq \bar{f}(p)$ , то

$$\theta(t-\tau)f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}\bar{f}(p). \quad (73)$$

В качестве примера найдем изображение оригинала функции

$$f(t) = (t-1)^2\theta(t-1)$$

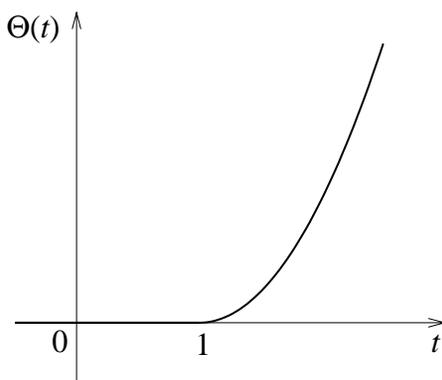


Рис. 3.

(рис. 3). Здесь  $f(t)$  есть функция  $t^n$ , но “выключенная” с запаздыванием  $\tau = 1$ . Так как  $t^2 \doteq \frac{2}{p^3}$ , то по теореме запаздывания имеем

$$(t-1)^2\theta(t-1) \doteq \frac{2}{p^3}e^{-p}. \quad (74)$$

Если бы мы в записи функции  $f(t)$  опустили бы множитель  $\theta(t-1)$ , то получили бы функцию  $(t-1)^2$ , но, как мы условились, такая функция означает оригинал  $(t-1)^2\theta(t)$  без запаздывания. Изображение этого оригинала будет

$$(t-1)^2\theta(t) = (t^2 - 2t + 1)\theta(t) \doteq \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}. \quad (75)$$

Таким образом, недопустимо опускать множители вида  $\theta(t-\tau)$  в записи оригинала, ибо это может привести к ошибкам и недоразумениям.

Рассмотрим далее примеры.

1. Найти изображение функции  $f(t)$ , представленной на рис. 4. Эта функция есть импульс интенсивности 3, включенный

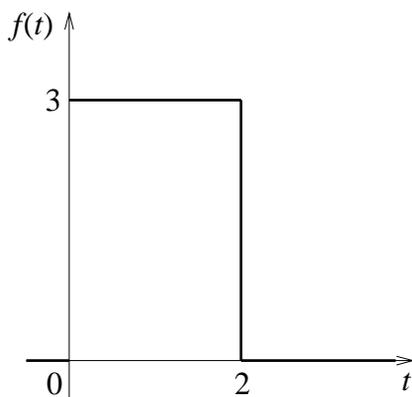


Рис. 4.

в момент времени  $t = 0$ , следовательно, его можно записать как

$$f(t) = 3 - 3\theta(t - 2). \quad (76)$$

Получаем

$$\bar{f}(p) = \frac{3}{p} - \frac{3}{p}e^{-2p} = \frac{3}{p}(1 - e^{-2p}). \quad (77)$$

2. Оригинал  $f(t)$  задан на [рис. 5](#).

Его аналитически можно записать так:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 - 2\theta(t - 1) + 4\theta(t - 1) - 4\theta(t - 2) + \theta(t - 2) - \theta(t - 3) = \\ &= 2 + 2\theta(t - 1) - 3\theta(t - 2) - \theta(t - 3). \end{aligned} \quad (78)$$

Имеем

$$\bar{f}(p) = \frac{2}{p} + \frac{2}{p}e^{-p} - \frac{3}{p}e^{-2p} - \frac{1}{p}e^{-3p}. \quad (79)$$

3. Построить график функции

$$f(t) = (t^2 - 5t + 11)\theta(t - 2)$$

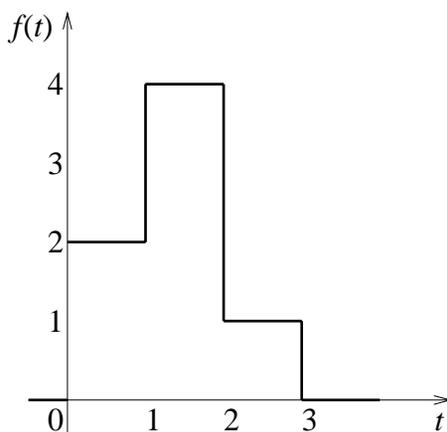


Рис. 5.

и найти ее изображение. Эта функция описывает процесс, включаемый с запаздыванием  $\tau = 2$ . Для того, чтобы решить, какой это процесс, нужно заданную функцию представить в виде  $f(t) = \varphi(t-2)\theta(t-2)$ . Сделаем это так:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= (t^2 - 6t + 11)\theta(t-2) = \\
 &= ((t-2)^2 - 4t - 4 - 6t + 11)\theta(t-2) = \\
 &= ((t-2)^2 - 2t + 7)\theta(t-2) = \\
 &= ((t-2)^2 - 2(t-2) + 3)\theta(t-2). \quad (80)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $f(t)$  есть процесс  $\varphi(t) = t^2 - 2t + 3$ , “включаемый” с запаздыванием  $\tau = 2$ . На рис. 6 представлены графики функций  $\varphi(t)$  и  $f(t)$ .

Так как

$$\varphi(t) = t^2 - 2t + 3 \doteq \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p}, \quad (81)$$

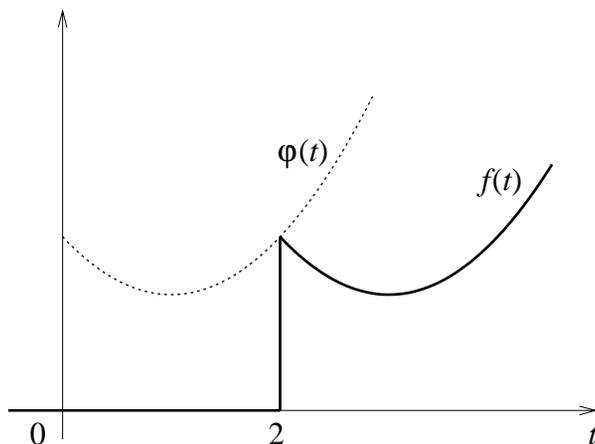


Рис. 6.

то применяя теорему запаздывания, находим

$$f(t) = \varphi(t-2)\theta(t-2) \doteq \left( \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p} \right) e^{-2p}. \quad (82)$$

4. На [рис. 7](#) представлен график функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3, & 0 \leq t \leq 4 \\ 9 - \frac{3}{2}t, & 4 < t \leq 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases} \quad (83)$$

Требуется с помощью единичной функции Хевисайда записать оригинал одним аналитическим выражением и найти изображение этого оригинала. Имеем  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ ; в момент времени

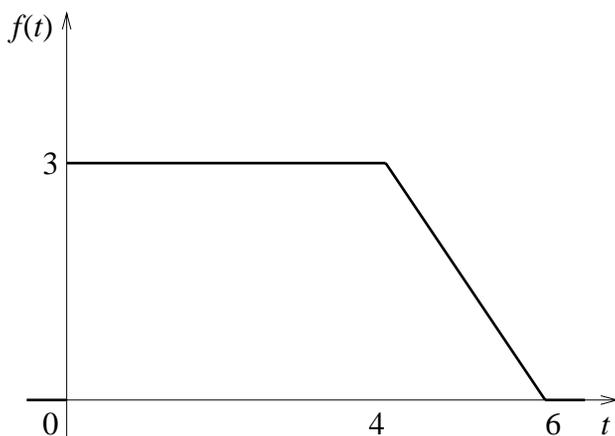


Рис. 7.

$t = 0$  включается функция, равная 3; в момент  $t = 4$  она выключается и включается функция  $9 - \frac{3}{2}t$ ; в момент времени  $t = 6$  выключается и эта функция. Все это можно записать так:

$$\begin{aligned} f(t) &= 3\theta(t) - 3\theta(t-4) + \left(9 - \frac{3}{2}t\right)\theta(t-4) - \left(9 - \frac{3}{2}t\right)\theta(t-6) = \\ &= 3\theta(t) + \left(6 - \frac{3}{2}t\right)\theta(t-4) - \left(9 - \frac{3}{2}t\right)\theta(t-6). \end{aligned} \quad (84)$$

Для того, чтобы найти изображение этого оригинала, нужно, рассуждая как и в предыдущем примере, представить его в форме

$$f(t) = 3\theta(t) + \varphi_1(t-4)\theta(t-4) + \varphi_2(t-6)\theta(t-6). \quad (85)$$

Имеем:

$$f(t) = 3\theta(t) + \left[6 - \frac{3}{2}(t-4) - 6\right]\theta(t-4) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ 9 - \frac{3}{2}(t-6) - 9 \right] \theta(t-6) = \\
 & = 3\theta(t) - \frac{3}{2}(t-4)\theta(t-4) + \frac{3}{2}(t-6)\theta(t-6). \quad (86)
 \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(t) &= -\frac{3}{2}t \doteq -\frac{3}{2p^2}, \\
 \varphi_2(t) &= \frac{3}{2}t \doteq \frac{3}{2p^2},
 \end{aligned} \quad (87)$$

то, применяя теорему запаздывания, находим

$$f(t) \doteq \frac{3}{p} - \frac{3}{2p^2}e^{-4p} + \frac{3}{2p^2}e^{-6p}. \quad (88)$$

5. Найти оригинал по его изображению

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p^2}e^{-2p}. \quad (89)$$

Имеем:

$$\frac{1}{p^2} - \frac{3}{p^2}e^{-2p} \doteq t - 3(t-2)\theta(t-2). \quad (90)$$

## 8. Изображение периодических оригиналов

Пусть  $f(t)$  — периодический оригинал с периодом  $T$ , т.е.

$$f(t+T) = f(t)$$

для всех  $t > 0$ . Докажем теорему.

Теорема. Изображение периодического оригинала  $f(t)$  с периодом  $T$  определяется формулой

$$\bar{f}(p) = \frac{\bar{\Psi}(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (91)$$

где

$$\bar{\Psi}(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt. \quad (92)$$

Доказательство Разобьем промежутки интегрирования  $[0, \infty)$  на два промежутка и, положив во втором из следующих ниже интегралов  $t = \tau + T$ , получим  $([0, \infty) = [0, T] \cup [T, \infty))$

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt + \int_T^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \\ &= \Psi(p) + \int_0^{\infty} f(\tau+T)e^{-p(\tau+T)} d\tau = \Psi(p) + e^{-pT} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau = \\ &= \bar{\Psi}(p) + e^{-pT} \bar{f}(p). \quad (93) \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\bar{f}(p) = \bar{\Psi}(p) + e^{-pT} \bar{f}(p)$$

и

$$\bar{f}(p) = \frac{\bar{\Psi}(p)}{1 - e^{-pT}},$$

что и требовалось доказать.

Функция  $\bar{\Psi}(p)$ , определяемая формулой (92), является изображением оригинала

$$\psi(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T. \end{cases} \quad (94)$$

Можно доказать и обратную теорему: оригинал  $f(t)$ , изображение которого имеет вид (91), является периодической функцией с периодом  $T$ , которая получается при периодическом продолжении функции  $\psi(t)$  с отрезка  $[0, T]$  на всю положительную часть оси  $t$ .

Пример. Найти изображение периодического оригинала, имеющего вид  $f(t) = A |\sin wt|$  (рис. 8).

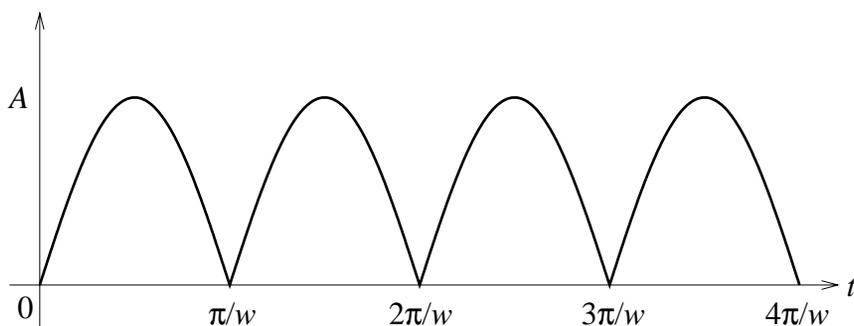


Рис. 8.

Функция  $f(t)$  имеет период  $T = \frac{\pi}{w}$ . Дважды интегрируя по частям, находим

---

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(p) &= \int_0^T f(t)e^{-pt} dt = A \int_0^{\pi/w} e^{-pt} \sin wt dt = \\ &= \frac{Aw}{p^2 + w^2} \left( 1 + \exp\left(-\frac{T}{w}\right) \right).\end{aligned}$$

Здесь было использовано изображение функции  $\sin wt$  (см. ф. 5 табл. 2). Следовательно,

$$\bar{f}(p) = \frac{Aw}{p^2 + w^2} \frac{1 + e^{-\frac{pT}{w}}}{1 - e^{-\frac{pT}{w}}} = \frac{A}{p^2 + w^2} \operatorname{cth}\left(\frac{pT}{2w}\right). \quad (95)$$

## 9. Нахождение изображений функций непосредственно с помощью определения и с использованием таблиц изображений

Заметим предварительно, что в таблице и в каждом из приведенных ниже примеров указывается только значение  $f(t)$  при  $t > 0$  (всегда имеется ввиду, что  $f(t) = 0$ , если  $t < 0$ ).

Найти изображение следующих функций, пользуясь определением (1):

$$9.1. \quad f(t) = 1.$$

$$9.2 \quad f(t) = t.$$

$$9.3 \quad f(t) = e^{-kt}.$$

**Решение.**

$$9.1. \quad \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-pN} \Big|_0^N = \\ = -\frac{1}{p} \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-pN} - 1] = \frac{1}{p} \quad (\text{так как } \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-pN} = 0, \operatorname{Re} p > 0)$$

9.2. Находим изображение  $f(t)$  интегрированием по частям:

$$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt \\ dv = e^{-pt} dt \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt}$$

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t = -\frac{1}{p} t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^2}. \quad (\text{см. пример 1})$$

$$9.3. \quad \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-kt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+k)t} dt = \frac{1}{p+k}. \quad (k \neq -p)$$

Итак, получено, что:

$$9.1. \quad 1 \dot{\div} \frac{1}{p} \quad (1 \ddot{\div} \frac{1}{p}); \quad (\text{см. табл. 2, ф.1})$$

$$9.2. \quad t \dot{\div} \frac{1}{p^2} \quad (t \ddot{\div} \frac{1}{p^2}); \quad (\text{см. табл. 2, ф.3, } n = 1)$$

$$9.3. \quad e^{-kt} \dot{\div} \frac{1}{p+k} \quad (e^{-kt} \ddot{\div} \frac{1}{p+k}). \quad (\text{см. табл. 2, ф.4, } \alpha = -k)$$

Найти изображение следующих функций, пользуясь табл. 2 и свойствами изображений.

$$9.4. \quad f(t) = a^t.$$

$$9.5. \quad f(t) = \cos^3(t).$$

$$9.6. \quad f(t) = \text{sh} bt.$$

$$9.7. \quad f(t) = \text{sh} at \sin bt.$$

$$9.8. \quad f(t) = t \text{ ch} bt.$$

### Решение.

9.4. Представим функцию  $f(t) = a^t$  в виде  $f(t) = e^{t \ln a}$  и применим формулу (4) в табл. 2 изображений, приняв  $\alpha = \ln a$ , получим

$$e^{-t \ln a} \dot{\div} \frac{1}{p - \ln a}, \text{ т.е. } a^t \dot{\div} \frac{1}{p - \ln a}.$$

9.5. По формуле Эйлера  $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \cos^3 t &= \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} + \frac{3}{4} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t. \end{aligned}$$

Пользуясь свойством 1 линейности изображений и формулой 6 табл. 2, а именно  $\cos wt \doteq \frac{p}{p^2+1}$ , получим

$$\cos^3 t \doteq \frac{1}{4} \frac{p}{p^2+9} + \frac{3}{4} \frac{p}{p^2+1}.$$

В первом случае  $w = 3$ , во втором —  $w = 1$ .

9.6. По определению гиперболического синуса имеем

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{bt} - \frac{1}{2}e^{-bt}.$$

Так как по табл. 2 ф. 4  $e^{bt} \doteq \frac{1}{p-b}$ ,  $e^{-bt} \doteq \frac{1}{p+b}$  и по свойству 1 линейности изображения получим

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)} - \frac{1}{2(p+b)} = \frac{b}{p^2-b^2}, \text{ т.е. } \text{sh} bt \doteq \frac{b}{p^2-b^2}$$

(см. ф. 7 табл. 2)

9.7. Так как  $\text{sh} at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$ , то

$$f(t) = \text{sh} at \sin bt = \frac{1}{2}e^{at} \sin bt - \frac{1}{2}e^{-at} \sin bt.$$

Применим ф. 12 табл. 2 ( $w = b$ ,  $\lambda = a$  в первом слагаемом,  $\lambda = -a$  во втором слагаемом)

$$e^{\lambda t} \sin wt \doteq \frac{w}{(p-\lambda)^2 + w^2};$$

получим

$$\begin{aligned}\bar{f}(p) &= \frac{1}{2} \frac{b}{(p-a)^2 + b^2} - \frac{1}{2} \frac{b}{(p+a)^2 + b^2} = \\ &= \frac{2pab}{[(p-a)^2 + b^2][(p+a)^2 + b^2]}.\end{aligned}$$

9.8. Пользуясь определением гиперболического косинуса, можно записать

$$f(t) = t \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2} = \frac{1}{2} t e^{bt} + \frac{1}{2} t e^{-bt}.$$

Применяя ф. 9 табл. 2 ( $t e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{(p-\alpha)^2}$ ), приняв  $n = 1$ ,  $\alpha = b$  в первом слагаемом и  $\alpha = -b$  во втором слагаемом), получим

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{2(p-b)^2} + \frac{1}{2(p+b)^2} = \frac{p^2 + b^2}{(p^2 - b^2)^2}.$$

Найти изображения следующих функций:

9.9.  $f(t) = \sin^2 t.$

9.10.  $f(t) = e^t \cos^2 t.$

9.11.  $f(t) = \operatorname{ch} bt.$

9.12.  $f(t) = \operatorname{sh} at \cos bt.$

9.13.  $f(t) = \operatorname{ch} at \sin bt.$

9.14.  $f(t) = \operatorname{ch} at \cos bt.$

9.15.  $f(t) = t \operatorname{sh} bt.$

Ответы:

9.9.  $\bar{f}(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$

---

$$9.10. \quad \bar{f}(p) = \frac{p(p^2 + 2p + 3)}{(p-1)(p^2 - 2p + 5)}.$$

$$9.11. \quad \bar{f}(p) = \frac{p}{p^2 - b^2}.$$

$$9.12. \quad \bar{f}(p) = \frac{a(p^2 - a^2 - b^2)}{p[(p-a)^2 + b^2][(p+a)^2 + b^2]}.$$

$$9.13. \quad \bar{f}(p) = \frac{b(p^2 a^2 - b^2)}{[(p-a)^2 + b^2][(p+a)^2 + b^2]}.$$

$$9.14. \quad \bar{f}(p) = \frac{p(p^2 - a^2 + b^2)}{[(p-a)^2 + b^2][(p+a)^2 + b^2]}.$$

$$9.15. \quad \bar{f}(p) = \frac{2pb}{(p^2 - b^2)^2}.$$

## 10. Изображения производных и интеграла от оригинала.

10.1. Найти изображение

$$y''(t) - y'(t) - y(t),$$

если  $y(0) = y'(0) = 0$  и  $\bar{y}(p) \doteq y(t)$ .

**Решение.** По теореме дифференцирования оригинала (см. ф. 3-4 табл. 1) имеем:

$$\begin{aligned} y'(t) &\doteq p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}(p), \\ y''(t) &\doteq p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\bar{y}(p). \end{aligned}$$

Отсюда находим с учетом свойства линейности

$$y''(t) - y'(t) - y(t) \doteq (p^2 - p - 1)\bar{y}(p).$$

10.2. Найти изображение

$$y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau,$$

если  $y(0) = 1$  и  $\bar{y}(p) \doteq y(t)$ .

**Решение.** По теореме дифференцирования и интегрирования оригинала имеем

$$y'(t) \doteq p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}(p) - 1, \quad (\text{ф. 3 табл. 1})$$

$$\int_0^t y(\tau) d\tau \doteq \frac{\bar{y}(p)}{p}. \quad (\text{ф. 5 табл. 1})$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned}
 y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau &\doteq p\bar{y}(p) - 1 + \bar{y}(p) + \frac{\bar{y}(p)}{p} = \\
 &= \frac{p^2 + p + 1}{p} \bar{y}(p) - 1.
 \end{aligned}$$

10.3. Найти изображение

$$F(t) = y(t) - 2y'(t),$$

если  $y(0) = 0$ ,  $y(t) \doteq \bar{y}(p)$ .

10.4. Найти изображение

$$F(t) = y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - 2y(t),$$

если  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 2$ ,  $y(t) \doteq \bar{y}(p)$ .

10.5. Найти изображение

$$F(t, x) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}.$$

если  $T(x, t) \rightarrow \bar{T}(x, p)$ .

10.6. Найти изображение

$$F(t) = y'(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau,$$

если  $y(0) = 0$ ,  $y(t) \doteq \bar{y}(p)$ .

---

Ответы:

$$10.3. \quad \bar{F}(p) = (1 - 2p)\bar{y}(p).$$

$$10.4. \quad \bar{F}(p) = (p^3 - p^2 + 2p - 2)\bar{y}(p) - p - 1.$$

$$10.5. \quad \bar{F}(p) = \bar{T}(x, p) - T(x, 0) - a \frac{d^2 \bar{T}(x, p)}{dx^2}.$$

$$10.6. \quad \bar{F}(p) = \frac{\bar{y}(p)}{p}(p^2 - 1).$$

## 11. Отыскание оригинала по изображению.

При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения и свертки функций.

Найти оригиналы следующих функций:

$$11.1. \quad \bar{f}(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 5}.$$

**Решение.** Используем элементарные приемы для разложения этой дроби на сумму таких дробей, оригиналы которых известны по таблице:

$$\frac{p}{p^2 - 2p + 5} = \frac{p - 1 + 1}{(p - 1)^2 + 4} = \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 4} + \frac{1}{(p - 1)^2 + 4}.$$

(В знаменателе выделили полный квадрат.) По формулам 13, 12 табл. 2 имеем:

$$\begin{aligned} \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 2^2} &\doteq e^t \cos 2t \quad (\lambda = 1, w = 2); \\ \frac{1}{(p - 1)^2 + 2^2} &\doteq \frac{1}{2} \frac{2}{(p - 1)^2 + 2^2} \doteq \frac{1}{2} e^t \sin 2t \quad (\lambda = 1, w = 2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{p}{(p - 1)^2 + 4} \doteq e^t \left[ \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] = f(t).$$

$$11.2. \quad \text{Найти оригинал функции } \bar{f}(p) = \frac{1}{p^3 - 8}.$$

**Решение.** В этом примере используем элементарные приемы разложения, известные из интегрального исчисления. Разложим данную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p^3 + 8} = \frac{A}{p - 2} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 4}.$$

Для определения коэффициентов имеем тождество

$$1 \equiv A(p^2 + 2p + 4) + (Bp + C)(p - 2).$$

Полагая  $p = 2$ , находим  $1 = 12A$ ;  $A = \frac{1}{12}$ . Приравнявая коэффициент при  $p^2$  нулю и свободный член — единице, получим систему двух линейных, алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $B$  и  $C$ :

$$\begin{cases} p^2 & \left\{ \begin{array}{l} A + B = 0 \\ 4A - 2C = 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

Отсюда  $B = -A = -\frac{1}{12}$ ,  $C = 2A - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^3 - 8} &= \frac{1}{12} \frac{1}{p - 2} - \frac{1}{12} \frac{p + 4}{p^2 + 2p + 4} = \\ &= \frac{12}{p - 2} - \frac{1}{12} \frac{(p + 1) + (\sqrt{3})^2}{(p + 1)^2 + (\sqrt{3})^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{12} \frac{1}{p - 2} - \frac{1}{12} \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + (\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{\sqrt{3}}{(p + 1)^2 + (\sqrt{3})^2}.$$

Отсюда, используя ф. 4, 13, 12 табл. 2:

$$\frac{1}{p - 2} \doteq e^{2t} \quad (\alpha = 2);$$

$$\frac{p+1}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} \doteq e^{-t} \cos \sqrt{3}t \quad (\lambda = -1, w = \sqrt{3});$$

$$\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2 + (\sqrt{3})^2} \doteq e^{-t} \sin(\sqrt{3}t) \quad (\lambda = -1, w = \sqrt{3}),$$

находим

$$f(t) = \frac{1}{12}e^{2t} = \frac{1}{12}e^{-t} \left[ \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t) \right].$$

11.3. Найти оригинал функции

$$\bar{f}(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

**Решение.** Поскольку в данном случае все корни знаменателя действительные и простые (однократные), лучше всего воспользоваться теоремой разложения ф. 15 табл. 1 (при  $\bar{f}_1(p) \equiv u(p)$ ,  $\bar{f}_2(p) \equiv v(p)$ ). Имеем:

$$u(p) = p+1;$$

$$v(p) = p(p-1)(p-2)(p-3) \equiv p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p;$$

$$v'(p) = 4p^3 - 18p^2 + 22p - 6.$$

Находим корни уравнения  $v(p) = 0$ :  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_3 = 2$ ,  $p_4 = 3$ . Далее получим

$$\frac{u(p_1)}{v'(p_1)} = -\frac{1}{6}; \quad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)} = 1; \quad \frac{u(p_3)}{v'(p_3)} = -\frac{3}{2}; \quad \frac{u(p_4)}{v'(p_4)} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда по формуле 15 табл. 1 находим

$$f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}.$$

11.4. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции (ф. 14 табл. 1)

$$\bar{f}(p) = \frac{p}{p^4 - 1}.$$

**Решение.** Запишем  $\bar{f}(p)$  в виде  $\bar{f}(p) = \frac{p}{p^2-1} \frac{1}{p^2+1}$ . В силу того, что  $\frac{p}{p^2-1} \doteq \text{ch } t$  (ф. 8 табл. 2 при  $\lambda = 1$ ) и  $\frac{1}{p^2+1} \doteq \text{sin } t$  (ф. 5 табл. 1 при  $w = 1$ ) по теореме о свертке (ф. 14 табл. 1), имеем

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^4 - 1} &\doteq \int_0^t \text{ch}(t - \tau) \text{sin } \tau d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \text{sh}(t - \tau) \text{sin } \tau + \text{ch}(t - \tau) \text{ch } \tau \right] \Big|_0^t = \frac{1}{2} (\text{ch } t - \text{sh } t). \end{aligned}$$

Здесь было произведено интегрирование по частям.

Найти оригиналы по данным изображениям.

$$11.5. \quad \bar{f}(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)(p^2 + 4)}.$$

$$11.6. \quad \bar{f}(p) = \frac{1}{(p - 1)(p^2 - 4)}.$$

$$11.7. \quad \bar{f}(p) = \frac{p + 3}{p(p^2 - 4p + 3)}.$$

$$11.8. \quad \bar{f}(p) = \frac{1}{p(p^4 - 5p^2 + 4)}.$$

11.9. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции  $\bar{f}(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$ .

11.10. Найти свертку функции  $t$  и  $\cos t$  и ее изображение.

Ответы:

$$11.5. \quad f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cos t + \frac{1}{12} \cos 2t.$$

$$11.6. \quad f(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}.$$

$$11.7. \quad f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}.$$

$$11.8. \quad f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \operatorname{ch} t + \frac{1}{12} \operatorname{ch} 2t.$$

$$11.9. \quad f(t) = \int_0^t \cos(t - \tau) \cos \tau d\tau = \frac{1}{2} (\sin t + t \cos t).$$

$$11.10. \quad t * \cos t \doteq \frac{1}{p^2} \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

## 12. Применение операционного исчисления к решению некоторых дифференциальных и интегральных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

12.1. Решить дифференциальное уравнение (с начальным условием)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - 2y = e^t, & t > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Переходим к изображениям:

$$p\bar{y}(p) - 2\bar{y}(p) = \frac{1}{p-1} \quad \text{или} \quad (p-2)\bar{y}(p) = \frac{1}{p-1},$$

откуда  $\bar{y}(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$ .

Разложим эту рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2}.$$

Полагая  $p = 1$ , получим  $-A = 1$ , т.е.  $A = -1$ ; при  $p = 2$  имеем  $B = 1$ . Следовательно,

$$\bar{y} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1},$$

откуда

$$y = e^{2t} - e^t.$$

12.2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) + ay(t) = \varphi(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

**Решение.** Переходя к изображениям, получим

$$p\bar{y}(p) + a\bar{y}(p) - y_0 = \bar{\varphi}(p)$$

или

$$(p+1)\bar{y}(p) = \bar{\varphi}(p) + y_0,$$

откуда

$$\bar{y}(p) = \frac{y_0}{p+1} + \frac{\bar{\varphi}(p)}{p+a}.$$

Переходя к оригиналам, пользуясь [табл. 2](#) и теоремой о свертке, имеем

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t \varphi(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau.$$

12.3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3t},$$

если  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Решение.** Переходим к изображениям:

$$p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) - 2(p\bar{y} - y(0)) - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3}$$

или

$$p^2\bar{y} - 2p\bar{y} - 3\bar{y} = \frac{1}{p-3} \Rightarrow \bar{y}(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Разложим эту рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p+1}.$$

полагая  $p = -1$ , получаем  $1 = 16C$ , т.е.  $C = 1/16$ ; при  $p = 3$  имеем  $1 = 4A$ , т.е.  $A = 1/4$ . Сравнивая коэффициенты при  $p^2$ , получим  $0 = B + C$ , т.е.  $B = -C = -1/16$ . Следовательно,

$$\bar{y}(p) = \frac{1}{4(p-3)^2} - \frac{1}{16(p-3)} + \frac{1}{16(p+1)},$$

откуда, переходя к оригиналам, получим

$$y(t) = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}.$$

12.4. Решить интегральное уравнение

$$y(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau + 1.$$

**Решение.** Строим изображающее уравнение:

$$\bar{y}(p) = \frac{\bar{y}(p)}{p} + \frac{1}{p} \Rightarrow \bar{y} \cdot (p-1) = 1 \Rightarrow \bar{y} = \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, оригинал имеет вид

$$y = e^t.$$

12.5. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^t y(\tau) \sin(t-\tau) d\tau = 1 - \cos t.$$

**Решение.** Левая часть уравнения является сверткой функции  $y(t)$  и  $\sin t$ . Переходя к изображениям, получаем

$$\bar{y}(p) \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

Следовательно,  $\bar{y}(p) = 1/p$  и  $y(t) = 1$ .

12.6. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} + y_1 - y_2 = e^t \\ \frac{dy_2}{dt} + 3y_1 - 2y_2 = 2e^t \end{cases} \quad \text{при } t > 0, \text{ если } \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

**Решение.** Переходя к изображениям, имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} p\bar{y}_1(p) - 1 + \bar{y}_1(p) - \bar{y}_2(p) = \frac{1}{p-1} \end{cases} \quad (96)$$

$$\begin{cases} p\bar{y}_2(p) - 1 + 3\bar{y}_1(p) - 2\bar{y}_2(p) = \frac{2}{p-1} \end{cases} \quad (97)$$

или

$$\begin{cases} (p+1)\bar{y}_1(p) - \bar{y}_2(p) = \frac{1}{p-1} + 1 \end{cases} \quad (98)$$

$$\begin{cases} 3\bar{y}_1(p) + (p-2)\bar{y}_2(p) = \frac{2}{p-1} + 1 \end{cases} \quad (99)$$

откуда

$$\bar{y}_1(p) = \frac{1}{p-1}; \quad \bar{y}_2(p) = \frac{1}{p-1} \quad \Rightarrow \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^t.$$

12.7. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y + 1 \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

**Решение.** Переходя к изображениям, имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} p\bar{x}(p) = \bar{x}(p) + 2\bar{y}(p); & (100) \\ p\bar{y}(p) - 5 = 2\bar{x}(p) + \bar{y}(p) + \frac{1}{p}, & (101) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p-1)\bar{x} - 2\bar{y} = 0; & (102) \\ 2\bar{x} + (1-p)\bar{y} = -\frac{1}{p} - 5. & (103) \end{cases}$$

Решив эту систему относительно  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , получаем

$$\bar{x} = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)}, \quad \bar{y}(p) = \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Для определения оригиналов  $x(t)$  и  $y(t)$  воспользуемся теоремой разложения ф. 15 табл. 1:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(p) &= 10p+2; & \bar{f}_2(p) &= p^3-2p^2-3p; & \bar{f}'_2(p) &= 3p^2-4p-3, \\ & & p_1 &= 0, & p_2 &= -1; & p_3 &= 3; \\ \frac{\bar{f}_1(p_1)}{\bar{f}'_2(p_1)} &= \frac{\bar{f}_1(0)}{\bar{f}'_2(0)} = -\frac{2}{3}; & \frac{\bar{f}_1(p_2)}{\bar{f}'_2(p_2)} &= \frac{\bar{f}_1(-1)}{\bar{f}'_2(-1)} = -2; \\ & & \frac{\bar{f}_1(p_3)}{\bar{f}'_2(p_3)} &= \frac{\bar{f}_1(3)}{\bar{f}'_2(3)} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

Аналогично находим

$$y = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}.$$

Решить дифференциальные уравнения:

12.8.  $y' - 2y = 0, y(0) = 1.$

12.9.  $y' + y = e^t, y(0) = 0.$

12.10.  $y'' - 9y = 0, y(0) = y'(0) = 0.$

12.11.  $y'' + y' - 2y = e^t, y(0) = -1, y'(0) = 0.$

12.12.  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$

Ответы:

12.8.  $y(t) = e^{2t}.$

12.9.  $y(t) = \operatorname{sh} t.$

12.10.  $y(t) = 0.$

12.11.  $y(t) = \frac{5}{2}e^t + 4e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t}.$

12.12.  $y(t) = -\frac{5}{2}e^t + 4e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t}.$

Решить системы дифференциальных уравнений:

$$12.13. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$12.14. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases} \quad \text{если} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ответы:

$$12.13. \quad \begin{cases} x(t) = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ y(t) = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{cases}$$

$$12.14. \quad \begin{cases} x(t) = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t} \\ y(t) = \frac{3}{5}e^{5t} - \frac{2}{5}e^{-5t} \end{cases}$$

Решить интегральные уравнения:

$$12.15. \quad \int_0^t y(\tau)(t-\tau)^2 d\tau = \frac{1}{3}t^3.$$

$$12.16. \quad \int_0^t y(\tau) \cos(t-\tau) d\tau = 1 - \cos t.$$

Ответы:

$$12.15. \quad y(t) = 1.$$

$$12.16. \quad y(t) = t.$$

## Список литературы

- [1] А.В. Лыков. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.
- [2] Э.М. Карташов. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 1985.
- [3] В.А. Диткин, А.П. Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974.
- [4] Э.М. Карташов, К.Г. Агахи, Л.В. Рыкова. Математическое моделирование физико-химических процессов. Методическая разработка. М.: МИТХТ, 1986.
- [5] Э.М. Карташов, К.Г. Агахи. Математические методы исследования физико-химических процессов. Методическая разработка. М.: МИТХТ, 1986.
- [6] К.Г. Агахи, Г.М. Кипарисова, В.В. Шевелев. Типовой расчет задач теплопроводности и диффузии. Методическая разработка. М.: МИТХТ.
- [7] А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970.
- [8] В.А. Диткин, А.П. Прудников. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
- [9] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. ч. II. М.: Наука, 1973.
- [10] М.А. Лаврентьев, В.Б. Шабат. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

- [11] П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч. II. М.: Высшая школа, 1986.

## Справочные таблицы

Таблица 1.

Основные правила операционного исчисления.

№	$f(t)$	$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	Примечание
1.	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) dp$	$\bar{f}(p)$	Формула обращения
2.	$\sum_{i=1}^m c_i f_i(t), C_i = \text{const}$	$\sum_{i=1}^m c_i \bar{f}_i(p)$	Свойство линейности
3.	$f'(t)$	$p\bar{f}(p) - f(0)$	Изображение производной
4.	$f^{(n)}(t), n \geq 2$	$p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	
5.	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} \bar{f}(p)$	Изображение интеграла
6.	$tf(t)$	$-\bar{f}'(p)$	Дифференцирование изображения
7.	$t^n f(t), n \geq 0$	$(-1)^n \bar{f}^{(n)}(p)$	
8.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} \bar{f}(q) dq$	Интегрирование изображения
9.	$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$	$\frac{1}{p} \int_p^{\infty} \bar{f}(q) dq$	Интегрирование оригинала
10.	$\int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$	$\frac{1}{p} \int_0^p \bar{f}(q) dq$	

№	$f(t)$	$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$	Примечание
11.	$e^{kt} f(t)$	$\bar{f}(p-k)$	Теорема сдвига
12.	$f(t-t_0),$ $f(t) = 0$ при $t < 0$	$e^{-pt_0} \bar{f}(p)$	Теорема запаздывания
13.	$f(kt), k > 0$	$\frac{1}{k} \bar{f}\left(\frac{p}{k}\right)$	Теорема подобия
14.	$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$\bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p)$	Теорема умножения изображений
15.	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_1(p_k)}{\bar{f}_2'(p_k)} e^{p_k t}$	$\frac{\bar{f}_1(p)}{\bar{f}_2(p)} = \frac{\bar{f}_1(p)}{\prod_{k=1}^{\infty} a_k(p-p_k)}$	Теорема разложения

Таблица 2.

Изображения по Лапласу некоторых функций.

№	$f(t)$	$\bar{f}(p)$
1.	1	$\frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0$
2.	$t^{\nu}$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \nu > -1, \operatorname{Re} p > 0$
3.	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re} p > 0$
4.	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$
5.	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2 + w^2}, \operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} w $

№	$f(t)$	$\bar{f}(p)$
6.	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2 + w^2}, \operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} w $
7.	$\operatorname{sh} \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$
8.	$\operatorname{ch} \lambda t$	$\frac{p}{p^2 - \lambda^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$
9.	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda$
10.	$t \sin wt$	$\frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}, \operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} w $
11.	$t \cos wt$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}, \operatorname{Re} p >  \operatorname{Im} w $
12.	$e^{\lambda t} \sin wt$	$\frac{w}{(p - \lambda)^2 + w^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda +  \operatorname{Im} w $
13.	$e^{\lambda t} \cos wt$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + w^2}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda +  \operatorname{Im} w $
14.	$e^{-\alpha^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{p^2}{4\alpha^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{2\alpha}\right)$
15.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{\sqrt{p + \alpha}}$
16.	$\operatorname{erf} \sqrt{\alpha t}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{p\sqrt{p + \alpha}}$
17.	$\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p} \exp(-\alpha\sqrt{p})$
18.	$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right), \alpha > 0$	$\exp(-\alpha\sqrt{p})$
19.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-\alpha\sqrt{p})$

Примечания к таблице:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt, \operatorname{Re} x > -1 \quad \text{—} \quad \text{гамма-функция}$$

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \equiv 1 - \operatorname{erf} x$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$